18.ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ.

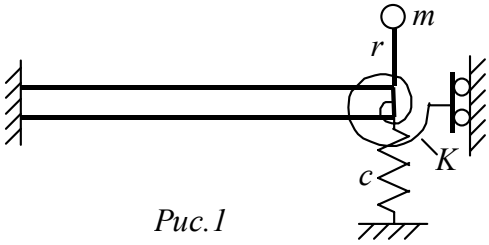


Рис.1

Обозначения:

Y(x) - прогиб оси балки;

EJ - жесткость балки на изгиб;

l - длина балки;

ρF - погонная масса;

m - сосредоточенная масса;

r - длина жесткого рычага - расстояние между осью балки и массой *m*;

c - линейная жесткость упругой опоры;

K - угловая жесткость упругой опоры;

$z = x/l$ - безразмерная координата ($0 \le z \le 1$).

При решении задач на определение собственных форм колебаний упругих балок функцию прогиба удобно записывать через функции Крылова S(*x*), T(*x*), U(*x*), V(*x*), которые представляют собой линейные комбинации гиперболических и тригонометрических синусов и косинусов:

$$\begin{aligned} &S(x) = [ch(x) + \cos(x)] / 2, \qquad T(x) = [sh(x) + \sin(x)] / 2 \\ &U(x) = [ch(x) - \cos(x)] / 2, \qquad V(x) = [sh(x) - \sin(x)] / 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Собственные формы *Y*(*z*) колебаний консольной балки (рис.1) через функции Крылова определяются как

$$Y(z) = U(\alpha z) + DV(\alpha z) \tag{2}$$

Параметры α и *D* зависят от граничных условий на правом конце балки. Собственные значения α (безразмерные собственные частоты) определяются из следующего характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} V(\alpha) + \left(f\alpha - \dfrac{g}{\alpha^3} \right) U(\alpha) & S(\alpha) + \left(f\alpha - \dfrac{g}{\alpha^3} \right) V(\alpha) \\ S(\alpha) - \left(w\alpha^3 - \dfrac{q}{\alpha} \right) T(\alpha) & T(\alpha) - \left(w\alpha^3 - \dfrac{q}{\alpha} \right) U(\alpha) \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

где *f*,*g*,*w*,*q*-безразмерные параметры: $f = m / \rho Fl$, $g = cl^3/EJ$, $w = f(r/l)^2$, $q = Kl/EJ$.

Уравнение (3) имеет бесчисленное множество положительных корней α, i =1,2,3, ... Для каждого значения а коэффициент *D* определяется из уравнения

$$V(\alpha) + \left(f\alpha - \frac{g}{\alpha^3} \right) U(\alpha) + D\left[S(\alpha) + \left(f\alpha - \frac{g}{\alpha^3} \right) V(\alpha) \right] = 0 \tag{4}$$

Каждой паре значений α и *D* соответствует своя собственная форма Y(z), которая определяется с точностью до множителя. Собственные формы можно пронормировать,

например, так, чтобы максимальное значение нормированной формы было равно единице. Тогда для нормированной формы можно записать следующее выражения

$$Y(z) = Y(z)/B = [\mathrm{U}(\alpha z) + D\mathrm{V}(\alpha z)] / B \quad (5)$$

$$B = \max|Y(z)| \quad (6)$$

Точкой α , в которой функция $Y(z)$ принимает максимальное по модулю значение B, может быть либо экстремум функции, либо точка z =1. В первом случае для определения z необходимо найти корни уравнения $Y'(z)=0$, или в развернутом виде

$$\mathrm{T}(\alpha z) + D\mathrm{U}(\alpha z) = 0 \quad (7)$$

Так как корней на отрезке $0 < z < 1$ может быть несколько (в вариантах задания - не более трех), то необходимо найти все. Затем из найденных точек и точки $z = 1$ выбрать в качестве z ту, в которой $|Y(z)|$ принимает максимальное значение.

Можно использовать и другой способ нормирования, при котором коэффициент В вычисляется по формуле

$$B = \int_0^1 [Y(z)]^2 dz \quad (8)$$

Если собственная форма имеет узлы (точки, где функция $Y(z)$ меняет знак), то интеграл от 0 до 1 надо вычислять как сумму интегралов по участкам между узлами. Поэтому сначала необходимо найти эти узлы, т.е. корни уравнения (2). В зависимости от варианта задания на отрезке от 0 до 1 их может быть не более двух.

ЗАДАНИЕ. Для своего варианта исходных данных вычислить три первых собственных значения α из уравнения (3) и построить графики соответствующих собственных нормированных форм.

ВЫБОР ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ. Переведите номер по групповому журналу из десятичной в двоичную систему исчисления. Запишите перед полученным числом нули так, чтобы получился пятизначный код. По двоичным значениям в каждой позиции кода определяются исходные данные (до 23-го варианта):

N позиции (слева направо)	1	2	3	4	5
Параметр	f	w	g	q	способ нормир.
0 в позиции	1	0	0	0	(6)
1 в позиции	0	1	1	1	(8)

РЕКОМЕНДАЦИИ к составлению программы. Для решения нелинейных уравнений можно использовать подпрограммы отделения корней и метода половинного деления (см. задачу 5), для численного интегрирования - подпрограмму метода Гаусса (см. задачу 6). Необходимо также составить подпрограммы-функции и (или) подпрограммы для вычисления: функций Крылова; функций (2),(3),(5),(7); подынтегральной функции в формуле (8); коэффициента B по формулам (6) либо (8).

В головной программе требуется описать массивы:

- A(3) -= для собственных значений α;
- D(3) - для коэффициентов D;
- Z0(3) - для точек экстремумов (или узлов);

- Y0(3) – для значений функции *Y* в точках экстремумов;
- B(3) - для коэффициентов *B* в формулах (6) или (8).

Алгоритм может быть построен по следующей схеме. В цикле по номеру формы (i=1,2,3) вычисляются:

- A(i) - собственное значение α;
- D(i) - коэффициент *D*;
- k значений Z0 и Y0 - точки экстремумов i-ой формы и значения функции *Y* в этих точках ($k \le 3$ - зависит от номера формы) или k значений координат узлов i-ой формы ($k \le 2$);
- B(i) - коэффициент *B* по формуле (6) или (8). Все результаты выводятся на печать.

После завершения цикла по i вычисляются при изменении *z* от 0 до 1 с шагом не более 0.1 и печатаются в таблицу ординаты трех собственных форм. При этом для записи и хранения текущих значений можно использовать массив Z0 или Y0.